Υποψήφιες ερωτήσεις προφορικών εξετάσεων, «Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι», Μιγαδική Ολοκλήρωση-Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Δήμογλου Κωνσταντίνος

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Κεφάλαιο 5

Ερώτηση 1. Πότε μία μιγαδική καμπύλη $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ονομάζεται κατά τμήματα λεία ή κατά τμήματα C^1; Τι ονομάζεται μήκος μιας τμηματικά λείας καμπύλης; Πότε μία καμπύλη ονομάζεται απλή, πότε κλειστή και πότε και τα δύο (εξηγήστε το και γεωμετρικά); Ποιο το μήκος της απλής κλειστής και θετικά προσανατολισμένης πολυγωνικής γραμμής η οποία διέρχεται από τα σημεία $2i, 0, 3, 2i$, με αυτή τη σειρά;

Ερώτηση 2. Τι ονομάζουμε ολοκλήρωμα καμπύλης $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$; Υπάρχει πάντα ολοκλήρωμα καμπύλης; Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. Είναι η συνάρτηση $f(s) = \displaystyle\int_0^s e^{2it}dt$ περιοδική;

Ερώτηση 3. Να δώσετε τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης κατά μήκος μίας τμηματικά λείας καμπύλης. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης είναι το ίδιο με το επικαμπύλιο όλοκλήρωμα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου; Θεωρούμε ότι διατρέχουμε μια μιγαδική καμπύλη. Για τον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος έχει σημασία ο τρόπος που διατρέχουμε την δοσμένη καμπύλη (Υπό την έννοια αλλαγής του προσανατολισμού ή της ταχύτητας); Τα παρακάτω είναι Αληθή ή Ψευδή;
- Έστω οι προσανατολισμένοι μοναδιαίοι κύκλοι $\gamma_1(t) = e^{it},\ t \in I_1 = [0, 2\pi]$ και $\gamma_2(t) = e^{2it},\ t \in I_2 = [0, \pi]$ και $\gamma_3(t) = e^{-it},\ t \in I_3 = [0, 2\pi]$ και μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Τότε, τα επικαμπύλια της f κατα μήκος των $\gamma_i,\ i = 1, 2, 3$ είναι ίσα.
- Αν μία καμπύλη έχει μήκος μηδέν, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης κατά μήκος μίας λείας καμπύλης είναι μηδέν.

Ερώτηση 4. Πότε μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη; Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο ανοικτό πεδίο ορισμού της είναι και ολοκληρώσιμη; Διατυπώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα των Ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Αν δοθεί μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό σύνολο D η οποία είναι ολοκληρώσιμη και μια τμηματικά λεία λεία καμπύλη $\gamma\colon [0,1] \to D$ και το μόνο που γνωρίσουμε για την καμπύλη αυτή είναι η τιμές $\gamma(0)$ και $\gamma(1)$, μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο της f κατά μήκος της γ; Αν επιπλέον, η γ είναι και κλειστή, τότε ποιά η ακριβής τιμή του παραπάνω επικαμπυλίου; Εξετάστε αν τα σύνολα $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{C} \setminus [0,1]$, $\Gamma = D(0,2) \setminus \{0\}$ και $\Delta = D(0,2) \setminus \{z : Im(z) = 3Re(z)\}$ είναι κυρτά, αστερόμορφα ή συνεκτικά στο $\mathbb{C}$. Διατυπώστε το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας σε αστερόμορφους τόπους για μια συνάρτηση f. Με βάση αυτό τι μορφή έχει η παράγουσα της συνάρτησης f;

Ερώτηση 5. Να δώσετε τον ορσιμό και τη γεωμετρική ερμηνεία του δείκτη στροφής μίας τμηματικά λείας κλειστής καμπύλης γύρω από ένα σημείο z το οποίο δεν ανήκει στην εικόνα της καμπήλης. Ποιός ο δείκτης στροφής του απλού θετικά προσανατολισμένου κύκλου για σημεία στο εσωτερικό του και ποιός για σημεία έξω από αυτόν; Μπορεί ποτέ η συνάρτηση του δείκτη στροφής για μία καμπύλη όπως προηγουμένως να είναι σε κάποια σημεία ασυνεχής; Έστω μία C^1 καμπύλη $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ορισμένων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$ με κατά σημείο όριο κάποια συνεχή συνάρτηση f, τότε μπορούμε να δηλώσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων κατά μήκος της καμπύλης γ συγκλίνει στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ;

Ερώτηση 6. Διατυπώστε το Ολοκληρωτικό Λήμμα Goursat. Ισχύει το αντίστροφό του; Έχουμε κάποιο Θεώρημα που να μας εξασφαλίζει υπό κάποιες προϋποθέσεις σε αστερόμορφους τόπους ολοκληρωσιμότητα μίας μιγαδικής συνάρτησης; Έστω K η απλή θετικά προσανατολισμένη τριγωνική καμπύλη με κορυφές $2i, -i, 2$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_K \frac{z^2}{z-(1+i)}dz$ και $\int_{-K} \frac{z^{2021}}{z-1}dz$, όπου $-K$ η αντίθετη καμπύλη της K. Ας υποθέσουμε ότι σας δίνεται μία ακέραια συνάρτηση f για την οποία γνωρίζετε τις τιμές τις στον κύκλο $|z| = 3$. Είναι δυνατόν να γνωρίζουμε πόσο κάνει η τιμή $f(i)$;

Ερώτηση 7. Αν μία συνάρτηση είναι ακέραια, τότε είναι αναλυτική; Αν ναι, τότε η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος αυτής εξαρτάται από την επιλογή του σημείου γύρω από το οποίο την αναλύουμε ως δυαναμοσειρά; Με τι θα ισούται η ακτίνα σύγκλισης αυτής; Αν μία συνάρτηση f είναι ακέραια και θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D(i,2)} \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz$, μπορούμε αντί αυτού να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D(i,1)} \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz$;

Ερώτηση 8. Διατυπώστε το Θεώρημα του Liouville. Χαρακτηρίστε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Αληθείς ή Ψευδείς.
- Ισχύει ότι $|\cos z| \leq 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- Υπάρχει πολυώνυμο $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ βαθμού 6 το οποίο έχει 5 ρίζες.
- Κάθε πολυώνυμο $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ βαθμού 6 έχει πάντα ακριβώς 6 ρίζες.
- Αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε έναν τόπο D, τότε είναι και ολόμορφη σε αυτόν.
- Αν μία συνάρτηση είναι ολόμορφη σε έναν τόπο D, τότε είναι και ολοκληρώσιμη.

Διατυπώστε το Θεώρημα Επέκτασης του Riemann για μια συνάρτηση f η οποία είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Υποθέτουμε ότι σας δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$, $z \neq 0$. Υπάρχει ολόμορφη επέκταση της f πάνω από το σημείο 0; Αν ναι, τότε βρείτε την.

Ερώτηση 9. Τι ορίζουμε ως ρίζα τάξης $m \in \mathbb{N}$ μιας ολόμορφης συνάρτησης f σε έναν τόπο D; Να βρείτε τις ρίζες και τις τάξεις τους για τις συναρτήσεις:
- $f(z) = e^z - 1$ και
- $g(z) = (z^2 + i)^2 \sin(z + i)$.

Ερώτηση 10. (i) Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μία συνεχής και ολόμορφη συνάρτηση f στο σύνολο $\overline{D}(0,1)$.
- Αν $f(\frac{i}{n}) = 3\frac{i}{n} + 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε, γνωρίζουμε τον τύπο της f για κάθε τιμή στο $\mathbb{C}$;
- Αν γνωρίζουμε ότι $f(\frac{i}{n}) = -\frac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε γνωρίζουμε τον τύπο της f για κάθε τιμή στο $\mathbb{C}$;
- Είναι ποτέ δυνατόν η δοθήσα f να ικανοποιεί τη σχέση $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Έστω f μια ακέραια συνάρτηση για την οποία $e^{ix}f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in (1,2)$. Ποια η τιμή της παράστασης $A = f(-\pi) + f(0)$;
(iii) Έστω μία ολόμορφη συνάρτηση f στο δίσκο $D(0,\varepsilon)$ όπου ε ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός. Επίσης, δίνεται ότι $f^{(n)}(0) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Μπορεί η συνάρτηση f να επεκταθεί ολόμορφα σε κάθε δίσκο $D(0,r)$ για r αυθαίρετα μεγάλο θετικό αριθμό;
Διατυπώστε ό,τι θεώρημα ή τεχνική χρησημοποιείσατε για να απαντήσετε τα παραπάνω τρία ερωτήματα.

Κεφάλαιο 6

Ερώτηση 1. Δώστε τους ορισμούς μεμονωμένη ανωμαλία, επουσιώδης ανωμαλία, πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ ουσιώσης ανωμαλία συνάρτησης και μερόμορφη συνάρτηση. Περιγράψτε μια μεθοδολογία που θα εφαρμόζατε σε μια άσκηση για να δείξετε ότι ένα σημείο είναι επουσιώδης ανωμαλία (αντίστοιχα πόλος) μιας δοθήσας συνάρτησης. Διατυπώστε χονδρικά τι μας λέει το θεώρημα των Casorati-Weierstrass για μια ουσιώση ανωμαλία μιας συνάρτησης. Είναι ικανή ή και ανγκαία η συνθήκη που δίνει;

Ερώτηση 2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι Αληθείς ή Ψευδής.

(i) Η $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z}$, μπορεί να επεκταθεί ολόμορφα πάνω από το 0.

(ii) Η $f(z) = \dfrac{z}{\sin^3 z}$, έχει στο 0 επουσιώδη ανωμαλία.

(iii) Η $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)}$, έχει στο -1 απλό πόλο.

(iv) Η $f(z) = \dfrac{z^8}{2\cos(z^2) - 2 + z^4}$, έχει στο 0 πόλο τάξης 2 .

(v) Η $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z - 2\pi}$, έχει πόλο τάξης 1 στο 2π.